2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试卷

一、选择题：（本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

（1）当 $x \to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$. (B) $\ln(1+\sqrt{x})$. (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$. (D) $1-\cos\sqrt{x}$. 【 】

（2）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是：

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$. (B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在. (D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

【 】

(3)如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间[–3，–2]，[2，3]上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间[–2，0]，[0，2]的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周，设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. 则下列结论正确的是

(A) $F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$. (B) $F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$. (D) $F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$. 【 】

（4）设函数 $f(x, y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy$ 等于

(A) $\int_0^1 dy\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$. (B) $\int_0^1 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$.

(C) $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)dx$. (D) $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx$. 【 】

（5）设某商品的需求函数为 $Q=160-2P$，其中 Q，P 分别表示需求量和价格，如果该商品需求弹性的绝对值等于 1，则商品的价格是

(A) 10. (B) 20. (C) 30. (D) 40. 【 】

（6）曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$，渐近线的条数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. 【 】

(7) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$. (B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$.

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$. (D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$. 【 】

(8) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 A 与 B

(A)合同，且相似.　　(B) 合同，但不相似 .

(C)不合同，但相似.　　(D) 既不合同，又不相似.　　【　】

(9) 某人向同一目标独立重复射击,每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$,则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

(A) $3p(1-p)^2$.　　(B) $6p(1-p)^2$.

(C) $3p^2(1-p)^2$.　　(D) $6p^2(1-p)^2$.　　【　】

(10) 设随机变量(X, Y)服从二维正态分布，且 X与 Y不相关， $f_X(x)f_Y(y)$ 分别表示 X，Y的概率密度，则在 $Y=y$ 的条件下， X的密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 为

(A) $f_X(x)$.　(B) $f_Y(y)$.　(C) $f_X(x)f_Y(y)$.　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.　【　】

二、**填空题**：11－16 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.

(11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$______________ .

(12) 设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$____________ .

(13) 设 $f(u,v)$是二元可微函数， $z=f(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y})$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________ .

(14) 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{y}{x})^3$ 满足 $y\big|_{x=1}=1$的特解为________________ .

(15) 数(1,2,3,4)设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 A^3 的秩为__________.

(16) 在区间(0, 1)中随机地取两个数，则两数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率为

____________.

三、**解答题**：(17－24 小题，共 86 分.)

(17) 数(3,4)（**本题满分 10 分**）

设函数 $y=y(x)$由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定，试判断曲线 $y=y(x)$在点(1, 1)附近的凹凸性.

(18)（本题满分 11 分）

设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\le 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\le 2, \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\le 2\}$.

（19）（本题满分 11 分）(数 1,3,4)

设函数 $f(x)$, $g(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$, 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

（20）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$具有连续的一阶导数, 且满足

$$f(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f'(t)dt+x^2$$

求 $f(x)$的表达公式.

(21) (本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &=0, \\ x_1+2x_2+ax_3 &=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3 &=0. \end{cases} \qquad ①$$

与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ ②

有公共解，求 a 的值及所有公共解.

(22) (本题满分 11 分)

设 3 阶对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$, $\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量,记 $B=A^5-4A^3+E$ 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值的特征向量.

(II) 求矩阵 B.

(23) (本题满分 11 分)

设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(I) 求 $P\{X>2Y\}$;

(II) 求 $Z=X+Y$的概率密度 $f_Z(z)$.

(24) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 独立分布, 且 X 的概率分布为

X	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

ERROR: limitcheck
OFFENDING COMMAND: string

STACK:

66038
33018
32512
33019